PROBLÈME A

DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ (ensemble des entiers naturels non nuls). $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel réel des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice transposée est notée ${}^tM$ et Ker (M) désigne le noyau de l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de matrice M dans la base canonique : la trace de M, notée tr (M), est la somme des coefficients diagonaux tandis que s(M) désigne la somme de tous les coefficients.

La matrice unité pour la multiplication de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n. On désigne par U_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 3$. Si p est un entier naturel tel que $0 < 2p < n$, on note M_p la matrice par blocs suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$M_p = U_n - \left(\begin{array}{c|c|c} (0) & (0) & (0) \\ \hline (0) & U_{n-2p} & (0) \\ \hline (0) & (0) & (0) \end{array}\right)$$

(matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1, à l'exception de ceux du bloc $(n - 2p) \times (n - 2p)$ central qui sont nuls).

1. Étude du cas particulier $n = 6$, $p = 1$. Dans $\mathbb{R}^6$ muni du produit scalaire usuel, déterminer une base orthonormale de vecteurs propres pour la matrice :

$$M = M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans tout ce qui suit, n est un entier naturel tel que $n \geqslant 3$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 < 2p < n$.
   a. Montrer que U_n et M_p sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer les dimensions de Ker (U_n) et Ker (M_p).
   b. Calculer tr (M_p) et tr (M_p^2). En déduire les valeurs propres non nulles de M_p.
   c. Déterminer une décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe de sous-espaces propres de M_p (on pourra chercher les vecteurs propres de M_p sous forme de vecteurs colonnes obtenus par superposition de trois blocs colonnes ayant p, $n - 2p$ et p lignes).
   d. Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par I_n, M_p, et M_p^2 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stable pour le produit matriciel.

3. *a.* Démontrer que l'application $(M, N) \longmapsto (M|N) = \text{tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   b. Soit $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par I_n et U_n. Déterminer l'orthogonal de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ relativement au produit scalaire précédent (on exprimera le résultat à l'aide de tr et s introduits dans les notations).
   c. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha_0 I_n + \beta_0 U_n$ sa projection orthogonale sur $\mathcal{F}$. Déterminer les réels α_0 et β_0 en fonction de tr (M) et s (M).
   d. Soit $\|\cdot\|$ la norme déduite du produit scalaire défini en *a.* Étant donnés deux réels α et β et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\|M - \alpha I_n - \beta U_n\|^2$ en fonction de α, β et des coefficients m_{ij} de M (i indice de ligne, j indice de colonne).
   e. Retrouver les résultats de *c.* en considérant l'application φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\varphi(\alpha, \beta) = \|M - \alpha I_n - \beta U_n\|^2.$$

page 250 2/4 -1992.
E. S. E. M Option : M, M', T'

PROBLÈME B

N.B. — *Si vous utilisez un théorème pour déduire un résultat dans le cours du problème, il faut, dans ce cas, donner de la façon la plus précise possible les hypothèses et conclusions du théorème et justifier son application aux cas considérés.*

Les quatre parties sont largement indépendantes.

On note E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni d'une norme, notée $\| \cdot \|$.

Dans tout le problème, A est une partie non vide de E et distincte de E.

Rappels.

1. On dit que x, $x \in E$, appartient à $\mathring{A}$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule ouverte centrée en x et de rayon ε (autrement dit l'ensemble des z, $z \in E$, tels que $\|z - x\| < \varepsilon$) est incluse dans A.

2. On dit que x, $x \in E$, appartient à $\overline{A}$ s'il existe une suite d'éléments de A convergente dans E (au sens de la norme de E) vers x.

On notera pour tout x, $x \in E$, $f_A(x) = \inf_{a \in A} \{\| x - a \|\}$.

I

1. Soit k, $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$. On dit qu'une application g de E dans $\mathbb{R}$ est k-lipschitzienne si pour tout x et y, $x \in E$ et $y \in E$, on a :

$$|g(x) - g(y)| \leqslant k \| x - y \|.$$

   a. Montrer que f_A est k-lipschitzienne pour un certain k que l'on déterminera.

   b. Que peut-on conclure quant à la continuité de f_A ?

2. Montrer que $f_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

II

Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne :

$$\| (x, y) \| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \text{ pour tout } (x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Soit A la réunion des ensembles $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.

1. Montrer que si $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$, $f_A(x + n, y + p) = f_A(x, y)$.

2. Soit D l'ensemble des points (x, y), $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tels que $|x| < \frac{1}{2}$ et $|y| < \frac{1}{2}$.

   a. Montrer que pour tout (x, y), $(x, y) \in D$, $f_A(x, y) = \min(|x|, |y|)$.

   b. En quels points de D les dérivées partielles de f_A existent-elles ? Préciser les valeurs de ces dérivées partielles aux points de D où elles existent.

3. Étudier les dérivées partielles en $(x_0, 0)$ et $(0, y_0)$, $(x_0, 0) \in D$ et $(0, y_0) \in D$, de l'application g_A de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout (x, y), $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par $g_A(x, y) = [f_A(x, y)]^2$.

Tournez la page S.V.P.

III

Dans cette partie, E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ muni de la norme « valeur absolue » et A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, distincte de $\mathbb{R}$.

1. On suppose $\mathring{A}$ non vide. Montrer que f_A est dérivable en tout point x de $\mathring{A}$ et calculer sa dérivée en ces points.

2. Soit x, $x \in \mathbb{R}$, n'appartenant pas à $\overline{A}$.

   a. On suppose que x est tel que $a < x$ pour tout $a \in A$.

   Calculer $f_A(x)$ en fonction de x et M_A où $M_A = \sup_{a \in A} a$.

   L'application f_A est-elle dérivable en x ? Si oui, calculer $f'_A(x)$.

   b. Si on suppose que x est tel que $x < a$ pour tout $a \in A$, calculer $f_A(x)$ en fonction de x et m_A où $m_A = \inf_{a \in A} a$.

   L'application f_A est-elle dérivable en x ? Si oui, calculer $f'_A(x)$.

3. Soit t, $t \in \mathbb{R}$, et notons $B(t)$ l'ensemble des réels z, $z \in A$, tels que $t < z$ et $C(t)$ l'ensemble des réels z, $z \in A$, tels que $z < t$.

   Pour t, $t \in \mathbb{R}$, tel que $B(t)$ et $C(t)$ sont non vides, on note enfin :

   $$M_{C(t)} = \sup_{c \in C(t)} c \quad \text{et} \quad m_{B(t)} = \inf_{b \in B(t)} b.$$

   Supposons que x, $x \in \mathbb{R}$, n'appartient pas à $\overline{A}$ et qu'il ne majore ni ne minore A.

   a. Montrer que $f_A(x) = \min(f_{B(x)}(x), f_{C(x)}(x))$.

   b. Montrer qu'il existe un intervalle $I(x)$ contenant x (intervalle que l'on déterminera) tel que les fonctions $t \longmapsto M_{C(t)}$ et $t \longmapsto m_{B(t)}$ sont constantes sur $I(x)$.

   c. Montrer que si x est tel que $x \neq \dfrac{M_{C(x)} + m_{B(x)}}{2}$ alors f_A est dérivable en x et calculer $|f'_A(x)|$.

   d. Montrer que si x est tel que $x = \dfrac{M_{C(x)} + m_{B(x)}}{2}$ alors f_A est dérivable à gauche et à droite en x et calculer ces dérivées à gauche et à droite (en x).

   L'application f_A est-elle dérivable en x ?

4. On suppose que A est borné.

   L'application f_A est-elle dérivable en $M_A = \sup_{a \in A} a$ et $m_A = \inf_{a \in A} a$?

5. Montrer que f_A est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si A est dense dans $\mathbb{R}$ (autrement dit si $\overline{A} = \mathbb{R}$).

6. *a.* Soit x, $x \in \mathbb{R}$, tel que $x \in \overline{A}$ et $x \notin \mathring{A}$.
En supposant que f_A est dérivable en x, calculer $f'_A(x)$.

b. Soit A l'ensemble des points z, $z \in \mathbb{R}$, tels que $z = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

On pose $g_A(x) = \frac{f_A(x)}{x}$ pour tout x, $x \in \mathbb{R}$, non nul.

Si $x_n = \frac{1}{2^n}$ et $y_n = \frac{3}{2^{n+1}}$ pour tout n, $n \in \mathbb{N}$, calculer $g_A(x_n)$ et $g_A(y_n)$ et déterminer

$\lim_{n \to +\infty} g_A(x_n)$ et $\lim_{n \to +\infty} g_A(y_n)$.

Que peut-on conclure concernant la dérivabilité à droite en O de f_A ?

IV

Dans cette partie on suppose $A = \mathbb{Z}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit l'application f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant $f_n(x) = \frac{1}{4^n} f_A(4^n x)$.

1. Montrer que f_n est périodique et préciser sa plus petite période strictement positive.

2. Pour $n = 0, 1, 2$ représenter f_0, f_1 et f_2.

3. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge en tout point de $\mathbb{R}$ et que l'application F qui à chaque x, $x \in \mathbb{R}$, fait correspondre $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

4. On fixe $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $h_n = \frac{1}{4^n}$.

a. Soit q, $q \in \mathbb{N}^*$, $q \geq n$. Montrer que $f_q(a + h_n) = f_q(a)$.

b. En déduire que :

$$\frac{F(a + h_n) - F(a)}{h_n} = \frac{1}{h_n} \sum_{q=0}^{n-1} (f_q(a + h_n) - f_q(a))$$

et

$$\frac{F(a - h_n) - F(a)}{h_n} = \frac{1}{h_n} \sum_{q=0}^{n-1} (f_q(a - h_n) - f_q(a)).$$

c. Soit k, $k \in \mathbb{Z}$, tel que $a \in I_{k,n}$ où $I_{k,n} = \left[\frac{k-1}{4^{n-1}}, \frac{k}{4^{n-1}}\right[$.

Pour J = 0, 2 on note $I_{k,n,J}$ l'intervalle $I_{k,n,J} = \left[\frac{k-1}{4^{n-1}} + \frac{J}{4^n}, \frac{k-1}{4^{n-1}} + \frac{J+2}{4^n}\right[$.

Montrer que : a et $a + h_n$ ou a et $a - h_n$ appartiennent à $I_{k,n,0}$ ou $I_{k,n,2}$.

d. On suppose que a et $a + h_n$ appartiennent à $I_{k,n,0}$.

Montrer qu'alors, pour tout q, $q \in \mathbb{N}$, $q \leq n - 1$, on a :

$\frac{f_q(a + h_n) - f_q(a)}{h_n}$ est égal à 1 ou -1.

En déduire que $\frac{F(a + h_n) - F(a)}{h_n}$ est un entier de même parité que n.

e. Déduire que F n'est pas dérivable en a et que de ce fait F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.